OPTIMUM PUBLIC PRICES

PRIX PUBLICS OPTIMAUX

1970, 170 pages, Editions Dunod-CNRS

This volume presents the general theory of the relations between optimum policies and prices, values, and the price system. Particular applications are the direct effects of public policies on prices in the pricing and price schedules of public utilities, indirect and direct taxation and tax schedules, and price regulations and subsidies. The theorems presenting the various structural properties are presented. The effects of all the relevant types of costs are considered. Individual utility functions (different for each individual) are uncertain, as are the various agents' production functions, demands, and supplies, since this uncertainty is the basic reason for using prices or schedules as direct or indirect instruments. Tariffs and taxes are a priori non-linear, and the cases where they are linear at the optimum are an endogenous result. Similarly, the fact that a number of agents have to be submitted to the same supply or demand schedule or prices rather than to individualized ones is an endogenous result. Optimum discrimination according to agents, quantities and qualities, cases when gratuity is optimum, the various effects of budgetary results, and effects of local fairness and general distribution are in particular presented. A number of results also apply to private management.

E X C E R P T

3. — TARIF FONCTIONNEL OPTIMAL D'UN PARAMÈTRE

Hypothèses.

Considérons le cas où les propriétés suivantes sont vérifiées.

— Un seul paramètre ξ du service varie. Ce peut être par exemple, mais pas nécessairement, une quantité de service de qualité définie. On omet partout l'écriture de l'indice j. Le tarif fonctionnel à déterminer est la fonction d'une variable T (ξ).

— Il y a constance des valeurs monétaires.

— On représente les indices i par une distribution continue. En particulier, soit $v(\xi)$ une disposition marginale à payer pour le paramètre quand son niveau est ξ; v ne dépend pas de y à cause de la constance des valeurs monétaires. Appelons $\Phi(V, \xi)$ le nombre de i pour lesquels $v(\xi) > V$, et $f(V, \xi) = -\dfrac{\partial\Phi(V, \xi)}{\partial V}$ la densité de cette distribution. Dans l'emploi du modèle pour l'incertitude, Φ et f incorporent respectivement les distributions de probabilité des $v(\xi)$ et leur densité; pour cela, on décrit d'abord ce que le Service sait des préférences des usagers par une distribution de probabilité; pour avoir le « nombre de i » de la définition de Φ, il suffit de procéder à l'équiprobabilisation [1] des éventualités : chacune est remplacée par un nombre égal à sa probabilité de nouvelles à caractéristiques identiques à celle-ci et toutes équiprobables. Dans le cas d'un seul usager à préférences inconnues, Φ et f ne sont que ces caractéristiques des distributions de probabilité des $v(\xi)$. S'il y a plusieurs usagers i à préférences inconnues et dont Φ^i et f^i sont les mêmes caractéristiques des distributions de probabilité de leurs $v^i(\xi)$, on a

$$\Phi = \sum_i \Phi^i \qquad \text{et} \qquad f = \sum_i f^i.$$

[1] Cf. Kolm : *Les choix financiers et monétaires* (Théorie et technique modernes), *op. cit.* chap. VI, p. 100.

— Les préférences considérées sont telles que l'indice ordinal d'utilité de chacune d'elle n'ait pas de maximum seulement relatif sous la contrainte tarifaire $t = \mathrm{T}(\xi)$ considérée.

— Le coût des fonds publics est général (uniforme sur les i et constant dans le domaine de variation considéré). Les causes d'uniformité sont renforcées pour des i qui sont le même agent en diverses éventualités de ses préférences.

— Le coût marginal pour un i au niveau ξ du paramètre n'est fonction que de ce ξ et non pas de ceux des autres i. Cette propriété de séparabilité marginale des coûts est en particulier certainement satisfaite entre des i qui sont la même personne en diverses éventualités de ses préférences pour des coûts encourus *ex post*, c'est-à-dire en connaissance de la demande. D'autre part, la symétrie du coût fait que ce coût marginal ne doit pas dépendre de i; appelons-le $c(\xi)$.

— Il n'y a pas d'effet externe ni d'effet indirect sur le coût (cas commun).

L'optimum.

Prenons comme paramètres du tarif fonctionnel $\mathrm{T}(\xi)$ les tarifs marginaux $\tau(\xi) = \mathrm{T}'(\xi)$. On peut appliquer à ces paramètres la formule générale trouvée plus haut, mais il est plus révélateur de retrouver directement le résultat dans ce cas. Pour cela, faisons passer $\tau(\xi)$ entre ξ et $\xi + d\xi$ de τ à $\tau + d\tau$, sans changer les autres τ.

Représentons les préférences dans un plan (y, ξ), où les y sont les y^i des différents i pris en sorte que les y_0^i coïncident en y_0 (fig. 7).

La partie de la courbe de tarif $y = y_0 - \mathrm{T}(\bar{\xi})$ pour $\bar{\xi} < \xi$ ne change pas, et celle pour $\bar{\xi} > \xi + d\xi$ subit une translation parallèle à l'axe des y de $d\xi . d\tau$ comptée vers les y négatifs. Par conséquent ni chaque $\bar{\xi}$ ni $\bar{t} = \mathrm{T}(\bar{\xi})$ ne changent pour $\bar{\xi} < \xi$. Pour $\bar{\xi} > \xi + d\xi$, chaque $\bar{\xi}$ ne change pas non plus à cause des propriétés des préférences : la constance des valeurs monétaires exclut les changements marginaux (la contrainte et la courbe d'indifférence qui lui est tangente se déplacent toutes deux parallèlement à l'axe des y sans se déformer), et l'absence de maximum relatif exclut les changements discontinus des $\bar{\xi}$ choisis; mais dans ce cas chaque $\bar{t}$ payé correspondant s'accroît de $d\xi . d\tau$. Notons que l'absence de maximum seulement relatif des indices d'utilité sous la contrainte tarifaire implique que les choix de $\bar{\xi} > \xi$ correspondent à des préférences telles que $v(\xi) > \tau(\xi)$; le nombre de ces choix est donc $\Phi\,[\tau\,(\xi),\ \xi]$. Considérant un ξ et τ où Φ est continu, ce nombre est aussi celui des choix $\bar{\xi} > \xi + d\xi$ quand $d\xi \to 0$.

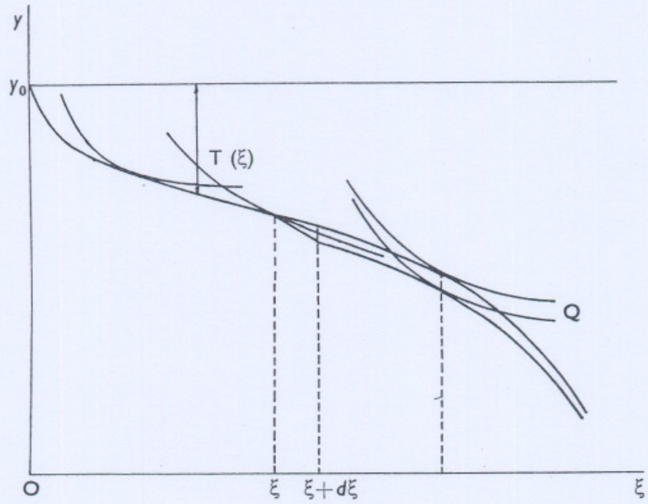

FIG. 7.

Donc la somme $\Phi\,[\tau\,(\xi),\ \xi].d\xi.d\tau$ est ainsi transférée par le changement considéré des usagers aux fonds publics, ce qui donne un surplus social en francs publics de $1 - \mu = \sigma$ par francs, soit donc un surplus social total de

$$\sigma.\Phi\,[\tau\,(\xi),\ \xi].d\xi.d\tau.$$

Regardons maintenant ce qui se passe entre ξ et $\xi + d\xi$. Là, tous les choix correspondant à des préférences dont la disposition marginale à payer $v\,(\xi)$ est telle que

$$\tau\,(\xi) < v\,(\xi) < \tau\,(\xi) + d\tau$$

passent de $\xi + d\xi$ à ξ quand $\tau\,(\xi)$ augmente de $d\tau$. Leur nombre est $f\,[\tau\,(\xi),\ \xi].d\tau$. Cette diminution de $d\xi$ de $\bar{\xi}$ a un effet sur les usagers concernés et sur le Service, sur les tarifs versés et sur les coûts. Le versement tarifaire de chacun de ces choix diminue de $\tau\,(\xi).d\xi$. Les préférences correspondantes sont concernées par la variation $d\xi$ et par celle de ce paiement; le surplus marginal correspondant est $-\,v\,(\xi).d\xi + \tau\,(\xi).d\xi$; mais on a précisément $v\,(\xi) = \tau\,(\xi)$ pour ces choix de ξ; donc ce surplus s'annule : ces choix sont indifférents entre les deux états. Reste donc l'effet sur le Service et le budget public; pour chacun de ces choix, ils reçoivent en moins $\tau(\xi).d\xi$ mais ils économisent le coût de production de la quantité $d\xi$ dont $\bar{\xi}$ diminue, soit $c(\xi).d\xi$, d'où au total un surplus social en francs publics de $[c(\xi) - \tau(\xi)].d\xi$. Pour l'ensemble des choix ainsi touchés, ce surplus est donc

$$[c(\xi) - \tau(\xi)].f[\tau(\xi), \xi].d\xi.d\tau.$$

Le surplus total social marginal en francs publics de $\tau(\xi)$ est la somme des deux morceaux trouvés, divisée par les différentielles $d\xi.d\tau$, soit

$$s = [c(\xi) - \tau(\xi)].f[\tau(\xi), \xi] + \sigma.\Phi[\tau(\xi), \xi].$$

Le $\tau(\xi)$ optimal pour chaque ξ est donné par l'équation $s = 0$, avec la condition du second ordre $\frac{\partial s}{\partial \tau} \leqslant 0$. Donc, pour le tarif fonctionnel optimal,

$$\boxed{[\tau(\xi) - c(\xi)].f[\tau(\xi), \xi] - \sigma\ \Phi[\tau(\xi), \xi] = 0.}$$

En appelant

$$E_\tau^\Phi = \frac{\tau}{\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -\frac{\tau f}{\Phi}$$

l'élasticité de Φ par rapport à τ, l'écart relatif du tarif marginal optimal au coût marginal est

$$\frac{\tau - c}{\tau} = -\frac{\sigma}{E_\tau^\Phi}.$$

$\sigma > 0$ implique $\tau > c$.

La condition du second ordre s'écrit

$$(1 + \sigma) f + (\tau - c) f'_\tau \geqslant 0,$$

ou, tenant compte de la valeur de $\tau - c$,

$$\frac{\Phi.\Phi''_{\tau^2}}{\Phi'^2_\tau} \leqslant \frac{1 + \sigma}{\sigma}$$

si $\sigma > 0$ (et l'inégalité inverse si $\sigma < 0$).

Nous verrons plus loin une façon de déterminer graphiquement ces τ optimaux à partir de Φ.

Autre démonstration.

On peut aussi donner une autre démonstration de ces résultats en calculant le surplus social apporté par la portion de la fonction de tarif entre ξ et $\xi + d\xi$. La dérivée de cette fonction étant τ, ce surplus, mesuré en francs publics et par unité de $d\xi$, se compose :

— d'un transfert de fonds des usagers au service de τ pour $\Phi(\tau, \xi)$ usagers, soit une valeur sociale de $\sigma.\tau.\Phi(\tau)$,

— d'un coût de production déboursé par le Service de c pour les mêmes usagers, soit une valeur sociale de $-c.\Phi(\tau)$ (les fournisseurs d'intrants sont compensés de cette offre par ce versement) ;

— d'un surplus privé de v pour tous les usagers tels que $v(\xi) > \tau$; or il y a $f(v).dv$ usagers à disposition marginale à payer en ξ comprise entre v et $v + dv$; le surplus privé ainsi gagné est donc

$$\int_{\tau}^{\infty} v.f(v).dv,$$

qu'il faut multiplier par μ pour l'avoir en francs publics.

Finalement, ce surplus marginal en ξ public du tarif est

$$\frac{1}{M_0}\frac{dM}{d\xi} = (\sigma\tau - c).\Phi(\tau,\xi) + \mu\int_{\tau}^{\infty} v.f(v,\xi).dv.$$

Et le surplus marginal de celui-ci en τ est

$$\begin{aligned} s(\tau, \xi) &= \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{M_0}\frac{dM}{d\xi}\right) = \sigma.\Phi(\tau, \xi) - (\sigma\tau - c).f(\tau, \xi) - \mu\tau.f(\tau, \xi) \\ &= \sigma.\Phi + (c - \tau).f, \end{aligned}$$

ce qui est l'expression obtenue plus haut et donne les résultats finals par $s = 0$ et $\dfrac{\partial s}{\partial\tau} \leqslant 0$.

Remarquons enfin que Φ et f entrent de façon linéaire et homogène dans les conditions d'optimalité : on peut donc les diviser par $\Phi(0,\xi)$, c'est-à-dire prendre tous ces nombres en *proportion*, Φ et f étant alors une distribution de fréquence dans les applications non probabilistes du modèle.

Exemple de calcul de la divergence optimale entre le tarif et le coût marginaux.

Nous verrons au paragraphe 5 une façon de déterminer graphiquement les τ optimaux, solution de l'équation obtenue, à partir de la fonction donnée $\Phi(\tau)$. Mais avec certaines formes de cette dernière on peut même calculer explicitement le τ optimal en fonction de c et des paramètres de cette fonction pour chaque ξ, donc la fonction $\tau(\xi)$ en fonction des fonctions $c(\xi)$ et Φ.

Prenons par exemple les cas où Φ est une fonction exponentielle ou puissance de τ. Appelons α et β deux fonctions positives de ξ seulement; les cas où ce sont des constantes sont des cas particuliers de celui-ci.

Les deux formes sont alors

$$\Phi = \alpha e^{-\beta\tau}$$

et

$$\Phi = \alpha\tau^{-\beta}$$

Ce doivent être des fonctions décroissantes de τ, et sans doute aussi de ξ — grâce à $\alpha(\xi)$ et $\beta(\xi)$ — pour exprimer la *satiation* (quasi-concavité des préférences). L'application de la formule d'optimalité obtenue donne alors par calculs simples respectivement dans ces deux cas

$$\tau - c = \frac{\sigma}{\beta}$$

et

$$\frac{\tau}{c} = \frac{1}{1 - \sigma/\beta} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\tau - c}{\tau} = \frac{\sigma}{\beta}.$$

De plus, dans le premier cas

$$\frac{\Phi . \Phi''_{\tau^2}}{\Phi'^2_{\tau}} = 1$$

et est inférieur à $1 + \frac{1}{\sigma}$ si $\sigma > 0$, de sorte que la condition de second ordre est assurée par un coût des fonds publics positif.