CHAPITRE 9

LA DISTRIBUTION: RELATIONS ENTRE LA DISTRIBUTION DU REVENU ET L'ALLOCATION DES CONSOMMATIONS COLLECTIVES

Il est fréquent que des consommations collectives soient produites par des autorités publiques afin de redistribuer le bien-être dans la société ou en tenant largement compte de telles considérations dans leur choix. Il en résulte souvent des inefficacités de l'ensemble de l'économie, et il est alors couramment suggéré qu'il vaudrait mieux utiliser des transferts de revenu (ou des modulations correspondantes d'impôt) à cette fin. Mais comment se fait exactement la substitution entre ces deux instruments ? Lesquelles de leurs combinaisons assurent l'efficacité sociale ?

Pour discuter ces relations entre la distribution du revenu, l'allocation des consommations collectives et l'efficacité, nous utilisons un modèle à deux consommateurs et deux biens consommés l'un privativement et l'autre collectivement. De plus, nous devons retenir un mode d'allocation de la consommation collective, et nous choisissons pour cela une taxation du type (2) cohérente — c'est-à-dire à demandes compatibles —.

A) Le modèle général est celui du paragraphe A du chapitre 6. Mais on ajoute que les quantités x, y^1, y^2 sont celles qui sont choisies par les consommateurs 1 et 2 sous leurs contraintes de budget. Plus précisément, on appelle r^1 et r^2 les revenus respectifs de 1 et 2, et on choisit le bien consommé privativement comme numéraire. Les impôts d'allocation sont $p^1 x$ pour 1 et $p^2 x$ pour 2, et les contraintes budgétaires sont

$$y^1 + p^1 x = r^1 ,$$
$$y^2 + p^2 x = r^2 .$$

x, y^1 et y^2 sont alors tels que x et y^1 maximisent $u^1(x, y^1)$ sous la première de ces contraintes et x et y^2 maximisent $u^2(x, y^2)$ sous la seconde.

De cette façon, x, y^1 et y^2 sont des fonctions de r^1, r^2, p^1 et p^2. Ces dernières variables sont les instruments : r^1 et r^2 pour la distribution des revenus, p^1 et p^2 pour la taxation d'allocation. Le problème est : quelles sont les relations entre r^1, r^2, p^1 et p^2 qui assurent l'efficacité sociale de l'état des variables x, y^1, y^2 ?

La figure 25 montre immédiatement la réponse. C'est la même que la figure 23 avec en plus les droites b^1 et b^2 dont les équations sont les contraintes de budget dans les plans x, y^1 et x, y^2, et la droite b de l'espace x, y^1, y^2 qui est définie par ces deux équations, et qui donc se projette sur le plan x, y^1 en b^1 et sur le plan x, y^2 en b^2. On voit immédiatement que si la maximalité pour l'unanimité est réalisée, b est la tangente commune aux trois surfaces U^1, U^2 et $f = 0$ en un point de la courbe C. A chaque point de celle-ci correspond une telle droite b. De cette dernière on déduit un ensemble efficace de p^1, p^2, r^1 et r^2 de la façon suivante : p^1 et p^2 sont, au signe près, les pentes des projections de b dans les plans x, y^1 et x, y^2, et r^1 et r^2 sont les coordonnées du point R du plan y^1, y^2 où la droite b perce ce plan. Quand le point de C considéré varie R décrit une courbe $\mathcal{R}$ dans le plan y^1, y^2. Cette courbe permet donc de connaître les paires de revenus r^1, r^2 qui permettent la maximalité pour l'unanimité avec la procédure décrite : ce sont les coordonnées des points de cette courbe.

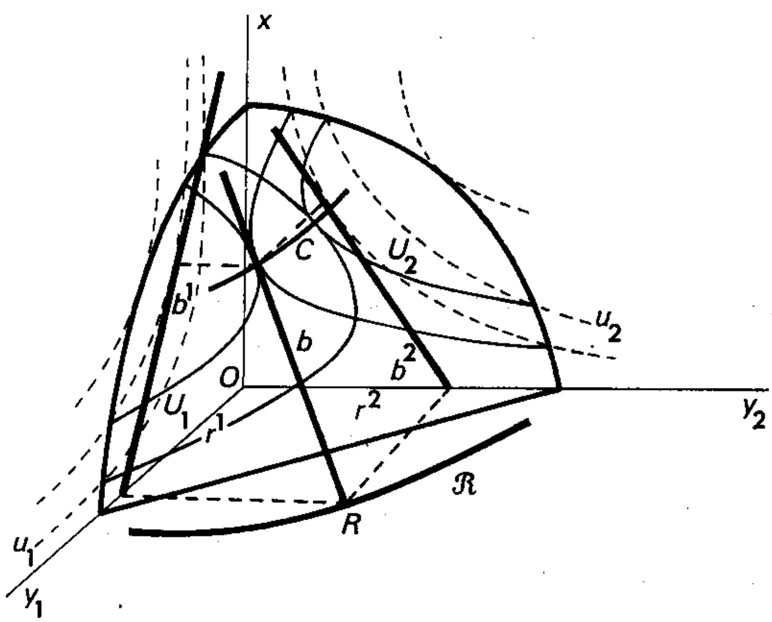

FIG. 25.

B) Pour les consommations collectives allouées par un budget public les discussions portent en fait sur les variables financières. Pour cela, il est utile de redéfinir légèrement les variables du modèle. Nous considérons une collectivité, par exemple une nation, constituée de deux classes (ou régions, etc.) dotées de préférences rationnelles et qui sont les « consommateurs » 1 et 2. On compte la composition du Produit National et la distribution du Revenu National, qui sont égaux, en *proportion* de ces agrégats ; cela revient à choisir la valeur commune de ceux-ci comme unité de valeur. On appelle alors s, q_1, q_2 les proportions du Produit National qui sont respectivement allouées aux consommations collectives par le budget de l'Etat et aux consommations privatives de 1 et 2. L'égalité

$$s + q_1 + q_2 = 1$$

est la présente forme de l'équation $f = 0$. Le budget d'allocation s est financé par des impôts prélevés pour les proportions t sur 1 et $1 - t$ sur 2 ; donc 1 et 2 payent respectivement ts et $(1 - t)\,s$. Enfin, le Revenu National est distribué pour la proportion r à 1 et donc $1 - r$ à 2 ; des redistributions par transferts directs de revenu ont r pour variable. Les deux indices d'utilité sont $u^1\,(s, q_1)$ et $u^2\,(s, q_2)$, et les deux contraintes budgétaires sont

$$q_1 + st = r\,,$$
$$q_2 + (1 - t).s = 1 - r\,.$$

En tirant q_1 et q_2 de ces équations, on peut écrire u^1 et u^2

$$u^1 = u^1\,(s, r - st)\,,$$
$$u^2 = u^2\left[s, 1 - r - (1 - t).s\right],$$

en fonction des trois variables instrumentales de l'Etat : volume du budget public d'allocation s, répartition des impôts le finançant t et distribution du revenu r.

Il est intéressant d'étudier le problème d'une part dans l'espace q_1, q_2, s de la production nationale, d'autre part dans l'espace r, s, t des instruments.

La première représentation est analogue à celle de la figure 25. La particularité est que la contrainte délimitant le domaine des possibles est un plan : P, d'équation $s + q_1 + q_2 = 1$ (fig. 26). Il en résulte que les droites b correspondant aux états socialement efficaces, qui sont tangentes à $f = 0$, sont dans ce plan. Donc la courbe $\mathcal{R}$ est la droite du plan q_1, q_2 d'équation $q_1 + q_2 = 1$, intersection de ce plan et de P. On peut étudier le problème dans deux dimensions, soit dans le plan P (fig. 27), soit en projetant ce plan dans le plan q_1, q_2, par exemple (fig. 28) ; dans ce dernier cas, on appelle V^1, V^2, Γ et β les projections de U^1, U^2, C et b.

La droite β a pour pente $\dfrac{t}{1 - t}$ et elle coupe la droite $q_1 + q_2 = 1$ en R de coordonnées r, $1 - r$. Quand t varie à r donné, b de P et β pivotent autour du R correspondant, et b^1 et b^2 pivotent autour des projections de ce point sur Oq_1 et Oq_2. Quand r varie à t donné, ces b, β, b^1 et b^2 se déplacent parallèlement à elles-mêmes. Quand les impôts sont proportionnels aux revenus, ce qui est une taxation « paye-qui-peut » pour financer les consommations collectives, $t = r$ et quand t et r varient en restant égaux, la droite β pivote autour de l'origine O et b, b^1 et b^2 pivotent autour du point $s = 1$ de l'axe des s. La figure 29 montre ces mouvements de b et β. Mais dans ces trois cas, seules certaines (souvent une seule) valeur de la variable assurent l'efficacité sociale.

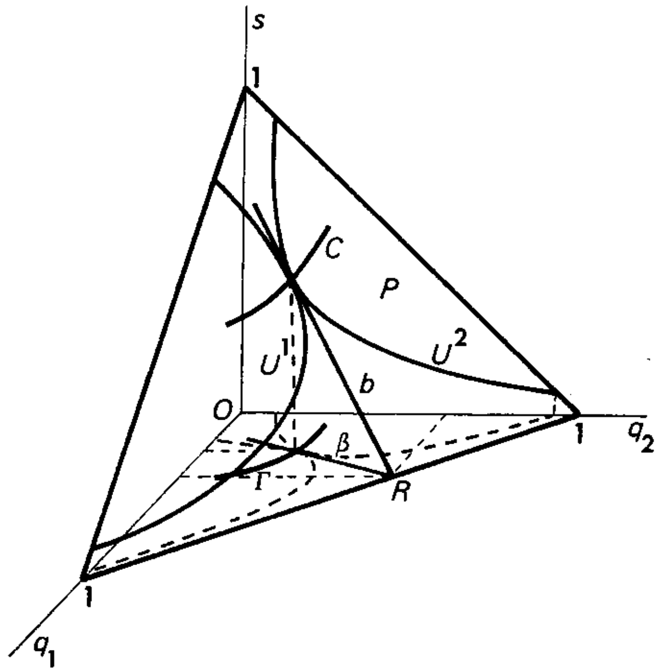

FIG. 26.

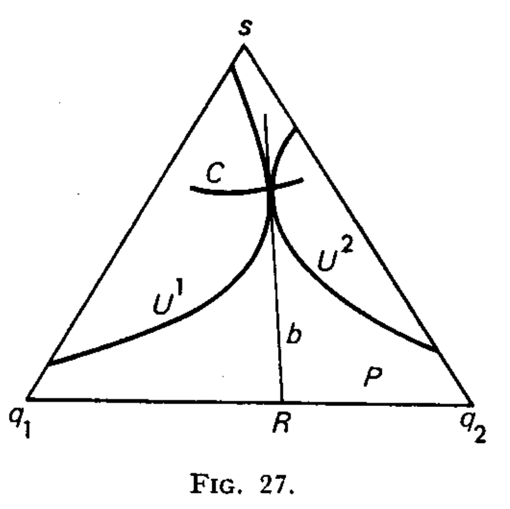

FIG. 27.

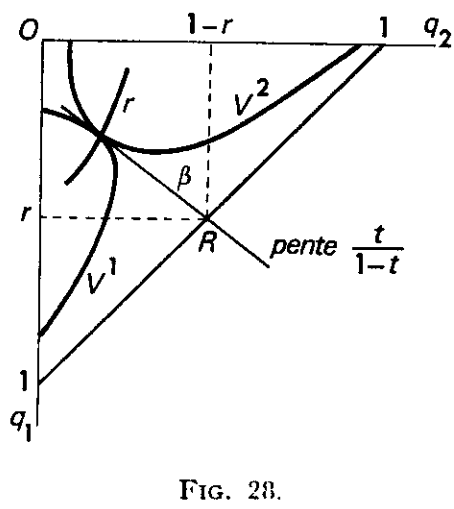

FIG. 28.

Enfin, quand le point efficace varie sur C, le b correspondant (tangent à U^1 et U^2 en ce point), et sa projection β, tangente commune à V^1 et V^2 en la projection de ce point sur le plan q_1, q_2, varient, et cette variation établit la relation entre t et r qui assure l'efficacité sociale.

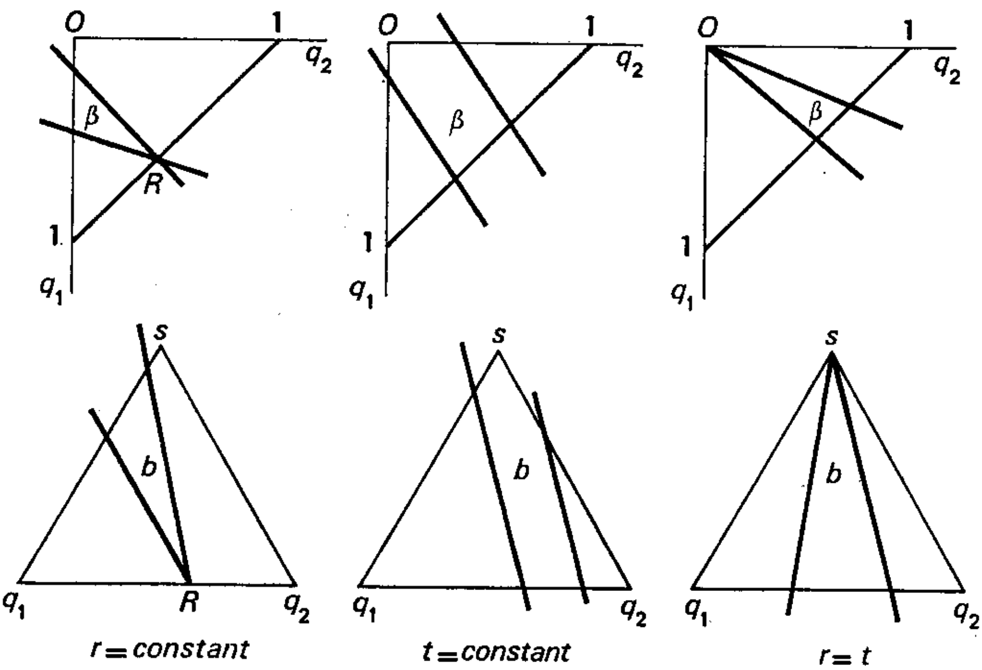

FIG. 29.

C) L'analyse du problème dans l'espace des variables instrumentales publiques r, s et t est particulièrement intéressante. De plus, mise sous cette forme la question présente des propriétés géométriques, et donc logiques, remarquables. Nous désignerons une valeur particulière d'une variable par le symbole de celle-ci surmonté d'une barre. D'autre part, si une lettre désigne un être générique d'une famille à un paramètre, cette lettre indexée par une valeur particulière de ce paramètre désigne l'être de cette famille correspondant à cette valeur. La figure 30 donne une vue à trois dimensions du problème, et les figures suivantes s'en déduisent par coupes ou projections parallèles aux plans ou axes de coordonnées.

On appelle $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$ des surfaces d'indifférence de 1 et 2, respectivement ; $\mathcal{U}^1_{\bar{u}^1}$ et $\mathcal{U}^2_{\bar{u}^2}$ sont donc les surfaces de l'espace r, s, t, d'équation

$$u^1(s, r - st) = \bar{u}^1 ,$$

$$u^2[s, 1 - r - (1 - t)\cdot s] = \bar{u}^2 .$$

Ces surfaces sont des surfaces réglées à génératrices parallèles au plan des r, t. En effet, étant donné $\bar{s}$ je définis $\bar{q}_1$ par

$$u^1(\bar{s}, \bar{q}_1) = \bar{u}^1$$

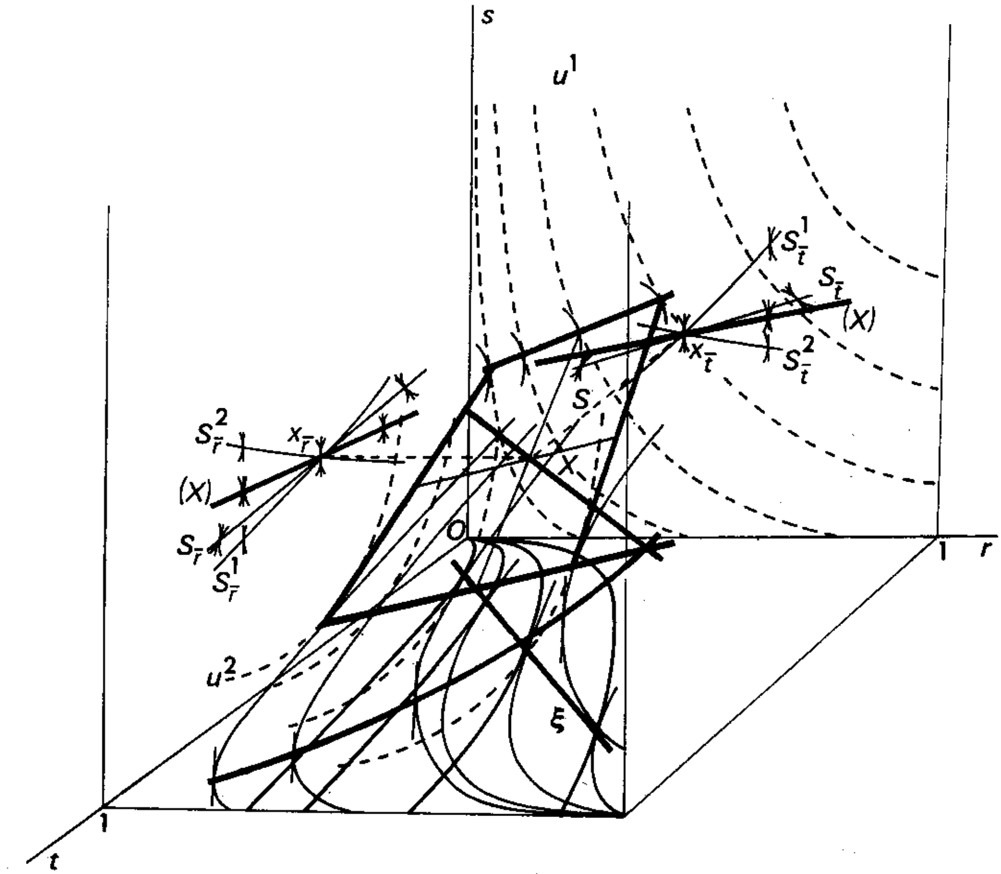

Fig. 30.

et je constate que la droite définie par

$$s = \bar{s}$$

et

$$r - \bar{s}t = \bar{q}_1$$

est dans $\mathcal{U}^1_{\bar{u}^1}$. De même, étant donné $\bar{s}$ je définis $\bar{q}_2$ par

$$u^2(\bar{s}, \bar{q}_2) = \bar{u}^2$$

et je constate que la droite définie par

$$s = \bar{s}$$

et

$$1 - r - (1 - t)\cdot\bar{s} = \bar{q}_2$$

ou

$$r - \bar{s}t = 1 - \bar{s} - \bar{q}_2\,,$$

c'est-à-dire

$$r - \bar{s}t = \bar{q}_1$$

est dans $\mathcal{U}^1_{\bar{u}^2}$. Pour le même $\bar{s}$, ces deux droites sont parallèles.

Ces droites appartiennent à la famille des droites D définies par leurs équations

$$s = \bar{s}$$

$$r - \bar{s}t = \text{constante}\,.$$

C'est une famille à deux paramètres, $\bar{s}$ et la constante. O étant l'origine des coordonnées, appelons la direction de l'axe Os la « verticale » et la direction du plan Ort l' « horizontale ». Un s est une « altitude », et une projection parallèle à Os sur Ort est une « projection horizontale ». Par définition, les droites D sont les droites horizontales dont la pente de leur projection horizontale est égale à leur altitude.

On voit alors que la surface $\mathcal{U}^1_{\bar{u}^1}$ est engendrée par les droites D s'appuyant sur la courbe d'équation $u^1\,(s, r) = \bar{u}^1$ du plan $t = 0$, où 1 ne paye pas de taxe. De même, $\mathcal{U}^2_{\bar{u}^2}$ est engendrée par les droites D s'appuyant sur la courbe d'équation $u^2\,(s, r) = \bar{u}^2$ du plan $t = 1$ où 2 ne paye pas de taxe. A chacune de ces courbes d'indifférence correspond ainsi une de ces surfaces d'indifférence.

Omettons l'indice 1 ou 2 quand nous voulons considérer des êtres qui peuvent être soit avec l'indice 1, soit avec l'indice 2. Appelons d la projection de D sur le plan Ort. Toutes les D d'une $\mathcal{U}$ constituent une famille de droites à un paramètre. Il en est ainsi de leurs d. Celles-ci ont donc une enveloppe w qui est le contour apparent de $\mathcal{U}$ en projection sur le plan Ort (il y a des w^1, des w^2, une $w^1_{\bar{u}^1}$ et une $w^2_{\bar{u}^2}$).

Quand un point se déplace le long d'une D de $\mathcal{U}$, le plan tangent à $\mathcal{U}$ en ce point pivote autour de D. Il est « vertical » au point de D où d touche son enveloppe, et il est alors aussi tangent à cette courbe w. Appelons M un tel point et m sa projection sur Ort, point de contact de d et de w. Quand D varie sur $\mathcal{U}$, M décrit une courbe W qui est le lieu des points de $\mathcal{U}$ où $\mathcal{U}$ a une tangente verticale, ou le lieu des points de $\mathcal{U}$ qui se projettent en w. On a des W^1, des W^2, un $W^1_{\bar{u}^1}$ et un $W^2_{\bar{u}^2}$. Quand $\bar{u}^1$ et $\mathcal{U}^1_{\bar{u}^1}$ varient, $W^2_{\bar{u}^1}$ décrit une surface, lieu des W^1, que l'on appelle S^1. Quand $\bar{u}^2$ et $\mathcal{U}^2_{\bar{u}^2}$ varient, $W^2_{\bar{u}^2}$ décrit une surface, lieu des W^2, que l'on appelle S^2.

S^1 et S^2 peuvent aussi être définis de la façon suivante. La maximation de u à r et t donnés, c'est-à-dire la recherche du s qui maxime u à r et t donnés, ou celle du $\mathcal{U}$ de plus haut u qui ait un point commun avec la droite verticale définie par ce r et ce t, donne un s tel que le point (r, s, t) soit sur S, ce point étant le point de contact de la verticale-contrainte et du $\mathcal{U}$ cherché. On définit ainsi S^1 avec les indices 1, et S^2 avec les indices 2, pour $\mathcal{U}$ et u.

En général, quand on a deux familles de surfaces d'indifférence dans un espace à trois dimensions, le lieu des points représentant des états efficaces, qui sont tels qu'une surface d'une famille est tangente à une surface de l'autre, est une courbe (variété à une dimension). Mais ce n'est pas le cas ici car une $\mathcal{U}^1$ et une $\mathcal{U}^2$ qui sont tangentes ne le sont pas en un seul point mais en tous les points d'une ligne, et celle-ci, quand ces surfaces changent, engendre une *surface* de points efficaces.

En effet, une $\mathcal{U}^1$ et une $\mathcal{U}^2$ qui sont tangentes en un point le sont aussi tout le long de la droite D passant par ce point. Pour le voir, on remarque d'abord que s, $r - st$ et $1 - r - s(1 - t) = 1 - s - (r - st)$ sont des constantes le long d'une droite D puisque celle-ci est définie par la constance de s et de $r - st$. Or ces trois grandeurs sont les arguments de u^1, de u^2 et de toutes leurs dérivées partielles. Donc ces fonctions ont les mêmes valeurs le long de toute droite D. On déduit d'abord de la constance de u^1 et u^2 que toute la droite D passant par le point commun à $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$ est commune à ces deux surfaces. Nous allons montrer que si de plus les conditions de tangence sont vérifiées en une point de D elles le sont en tout point de cette droite. Cela sera démontré si les conditions de tangence ne font intervenir que des dérivées partielles de u^1 et u^2. Ecrivons donc ces conditions ; appelant u_r, u_s, u_t les dérivées (totales) de u par rapport à r, s et t, et u_1 et u_2 les dérivées partielles premières de u par rapport à ses premier et second arguments, on a

$$\begin{aligned} u_r^1 &= u_2^1, & u_r^2 &= -u_2^2, \\ u_s^1 &= u_1^1 - tu_2^1, & u_s^2 &= u_1^2 - (1-t)\,u_2^2, \\ u_t^1 &= -su_2^1, & u_t^2 &= su_2^2; \end{aligned}$$

les conditions de tangence de $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$ sont

$$\frac{u_r^1}{u_r^2} = \frac{u_s^1}{u_s^2} = \frac{u_t^1}{u_t^2}.$$

On constate que r, s, t, qui apparaissent directement dans u_r, u_s et u_t disparaissent de ces conditions ; en effet, les deux rapports extrêmes valent chacun $-u_2^1/u_2^2$ et sont toujours égaux, et on peut prendre pour seconde condition

$$\frac{u_s^1}{u_r^1} = \frac{u_s^2}{u_r^2} \tag{1}$$

ou, avec les notations $v = \frac{u_1}{u_2}$ pour les dispositions marginales à payer pour s,

$$v^1 - t = - v^2 + (1 - t)$$

dont t disparaît puisque c'est

$$v^1 + v^2 = 1 \,. \tag{2}$$

Ces conditions montrent directement aussi que le lieu des points représentant des états efficaces est une surface et non une courbe. En effet, des deux conditions qui expriment la tangence, l'une dégénère en une identité et il ne reste plus qu'une seule liaison ainsi établie entre les r, s, t, qui est (2).

Appelons Δ une droite D le long de laquelle une $\mathcal{U}^1$ et une $\mathcal{U}^2$ sont tangentes, δ la projection de Δ sur le plan Ort, et S le lieu des Δ, c'est-à-dire des points représentants des états efficaces. S est donc aussi une surface réglée par des droites D.

Enfin, les trois surfaces S^1, S^2 et S ont en commun une *courbe*, X, et non un point. En effet, les deux surfaces $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$ qui passent par un point quelconque de l'intersection de S^1 et S^2 ont des plans tangents verticaux par définition de S^1 et S^2 ; de plus, ces $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$ contiennent toutes deux la droite D passant par ce point, et leurs plans tangents en ce point ont donc aussi en commun cette droite, qui est horizontale ; donc ces deux plans sont confondus et ce point est donc dans S.

Le plan tangent commun aux deux surfaces $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$ tangentes le long d'une droite Δ en un point de celle-ci pivote autour d'elle quand ce point varie. Il est vertical au point où Δ coupe X sur S. En la projection de ce point sur Ort, la projection δ de cette Δ est une tangente commune aux w^1 et w^2 de ces $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$. Donc la projection ξ de X sur Ort est le lieu des points où les courbes des deux familles de contours apparents w^1 et w^2 sont tangentes deux à deux (fig. 31-*a*).

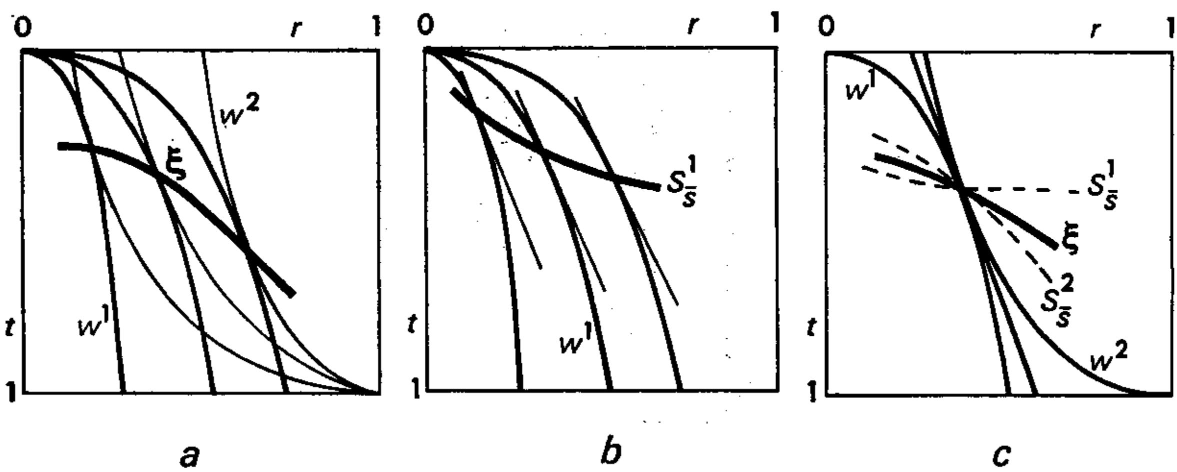

FIG. 31.

Enfin, il est intéressant d'étudier le problème à deux des variables r, s, t quand la troisième est constante. Il suffit pour cela de couper l'espace à trois dimensions de ces variables par un plan $r = \bar{r}$, $s = \bar{s}$ ou $t = \bar{t}$. On note les intersections des surfaces et courbes de l'espace r, s, t par les plans $r = \bar{r}$, $s = \bar{s}$ ou $t = \bar{t}$ par les lettres de ces éléments indexés par $\bar{r}$ et $\bar{t}$ (les figures montrent les projections de ces intersections sur les plans Ost, Ort et Osr).

La figure 31-*b* montre l'intersection $S^1_{\bar{s}}$ de S^1 par $s = \bar{s}$. C'est le lieu des points où les w^1 ont une tangente de pente $\bar{s}$. On construit de même $S^2_{\bar{s}}$. La figure 31-*c* montre la position de $S^1_{\bar{s}}$, $S^2_{\bar{s}}$ et ξ.

Les figures 32 et 33 montrent le problème respectivement à r et t constants. Les courbes des familles $\mathcal{U}^1_{\bar{r}}$, $\mathcal{U}^2_{\bar{r}}$, $\mathcal{U}^1_{\bar{t}}$, $\mathcal{U}^2_{\bar{t}}$ ont des tangentes verticales le long de $S^1_{\bar{r}}$, $S^2_{\bar{r}}$, $S^1_{\bar{t}}$, $S^2_{\bar{t}}$, et sont tangentes deux à deux le long de $S_{\bar{r}}$ et $S_{\bar{t}}$. $X_{\bar{r}}$ est le

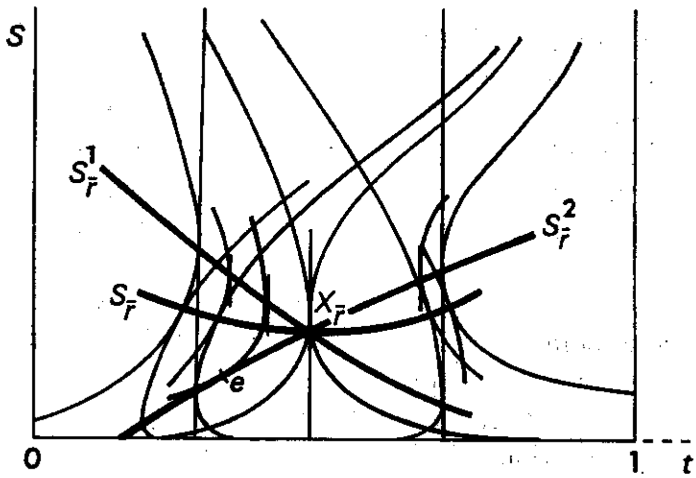

FIG. 32.

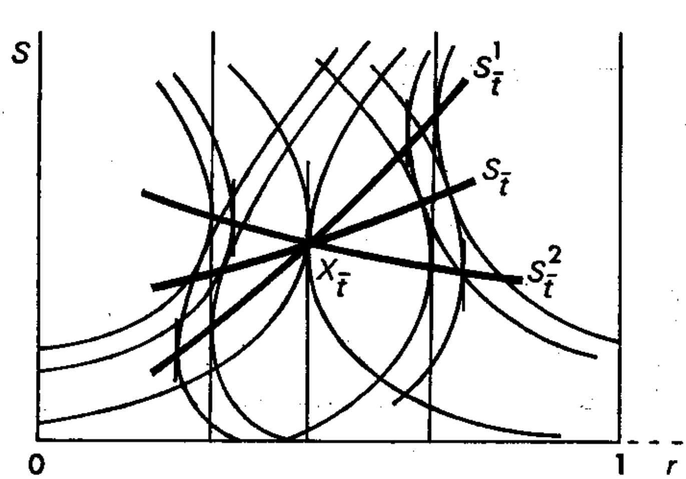

FIG. 33.

point où $S_{\bar{r}}^1$, $S_{\bar{r}}^2$, et $S_{\bar{r}}$ se coupent, et où $\mathscr{U}_{\bar{r}}^1$ et $\mathscr{U}_{\bar{r}}^2$ passant par ce point ont une tangente commune verticale. $X_{\bar{t}}$ est le point où $S_{\bar{t}}^1$, $S_{\bar{t}}^2$ et $S_{\bar{t}}$ se coupent, et où $\mathscr{U}_{\bar{t}}^1$ et $\mathscr{U}_{\bar{t}}^2$ passant par ce point ont une tangente commune verticale.

On peut voir ainsi exactement comment le problème à deux variables dépend du niveau de la troisième. Le cas $r = \bar{r}$, choix et financement de consommation collective à distribution du revenu donnée, est celui qu'étudie Johansen. L'erreur de cet auteur que nous avons signalée plus haut revient à dire que lorsqu'il discute l'effet d'une variation de $\bar{r}$ il confond $S_{\bar{r}}$ avec la projection de X sur Ost (ou sur le plan $r = \bar{r}$) : $X_{\bar{r}}$ se déplace sur la seconde, mais toute la première varie. La figure 32 montre aussi pourquoi les états résultants de la domination d'un agent par l'autre décrite au chapitre 8 conduisent à une production de consommation collective moindre que celle de $X_{\bar{r}}$: si par exemple 1 domine 2 comme indiqué, l'état qui se réalise est e, et dans le cas habituel où $S_{\bar{r}}^2$ a la pente indiquée, le s de e plus petit que celui de $X_{\bar{r}}$.